

UN MODELO NUMÉRICO EN ELEMENTOS FINITOS PARA LA CORRIENTE INDUCIDA POR LA MAREA. APLICACIONES AL ESTRECHO DE GIBRALTAR

MANUEL GONZÁLEZ
MARC A. GARCÍA
MANUEL ESPINO

y

AGUSTÍN SÁNCHEZ-ARCILLA

*Laboratori d'Enginyeria Marítima
Universitat Politècnica de Catalunya
Gran Capità s/n, Módulo D1, 08034 Barcelona*

RESUMEN

Mediante un modelo numérico quasi-3D en elementos finitos que resuelve las ecuaciones de aguas someras a través de una técnica de descomposición armónica, se ha estudiado el comportamiento de la marea en el Estrecho de Gibraltar. En esta región se acoplan dos regímenes de marea sustancialmente diferentes, el correspondiente al océano Atlántico y el de la cuenca mediterránea. Los resultados del modelo confirman la preponderancia de la circulación inducida por la marea en el flujo local de la zona. También se ha comprobado la importancia que en este ámbito tienen los efectos de la difusión turbulenta, de la fricción con el fondo, de la geometría del dominio y de la interacción de las componentes mareales con la circulación residual. El empleo de una interpolación de orden superior para la altura de la superficie libre y de una formulación no lineal para la fricción con el fondo debe permitir mejorar el grado de ajuste entre los resultados numéricos obtenidos y los datos disponibles.

SUMMARY

Tidal wave propagation patterns in the Gibraltar Strait are analyzed by means of a quasi-3D finite element model of the shallow water equations whose solver is based on a harmonic decomposition technique. In this region, two substantially different tidal regimes are coupled, the one corresponding to the Atlantic Ocean and that of the Mediterranean basin. The model results confirm that the tidal contribution is prevailing within local circulation patterns. Moreover, our solutions suggest that the turbulent diffusion of momentum, bottom friction effects, the geometry of the Strait and the tide-current interactions have an important influence on the tidal propagations patterns. The use both of a higher order interpolation scheme for the sea surface height and a non-linear formulation for bottom friction is envisaged as a means to obtain better agreement between model results and experimental data.

Recibido: Mayo 1994

INTRODUCCIÓN

El Estrecho de Gibraltar (Figura 1) tiene unos 60 Km de largo. Su boca occidental se sitúa en la sección comprendida entre los cabos Trafalgar y Espartel, de unos 44 Km de ancho. A medida que se avanza hacia el este, el estrecho se angosta hasta alcanzar la mínima anchura —unos 14 Km— entre Tarifa y Punta Cires. La entrada oriental, entre Gibraltar y Punta Almina, tiene aproximadamente 23 Km de ancho.

La batimetría del área es bastante complicada (ver Figura 1). A grandes rasgos, el fondo aumenta hacia el Mediterráneo al este de Tánger a lo largo de un canal cuyo eje es más o menos paralelo a la alineación Tarifa-Algeciras. En la parte atlántica, la profundidad es superior a los 400 m. Entre Punta Paloma y Punta Malabata la profundidad máxima no rebasa los 290 m. Al este, la profundidad aumenta rápidamente alcanzando los 800 m en Tarifa y casi 1000 m en su boca oriental⁷.

Es sabido que en el Estrecho existe un esquema de intercambio "bicapa". En superficie se registra un flujo hacia el Mediterráneo de agua atlántica, y a niveles profundos, una exportación hacia el Atlántico de agua mediterránea, más salina y más densa. La interfase que separa ambas capas se corresponde aproximadamente con la isohalina de 37.5°/00, y se sitúa por regla general a profundidades de entre 100 y 150 m.

El agua atlántica que ingresa por Gibraltar compensa el déficit hídrico del Mediterráneo. Por otra parte, el exceso de salinidad en la cuenca mediterránea es compensado por la exportación de Agua Levantina Intermedia y Mediterránea Profunda hacia el Atlántico. La compensación del déficit hidráulico mediterráneo supone un caudal medio circulante a través del Estrecho de aproximadamente 1 Sverdrup ($= 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$), lo que equivale a un flujo permanente con velocidades máximas del orden de 50 cm/s (Lacombe y Richez⁸).

Los regímenes de la marea a ambos lados del Estrecho son sustancialmente distintos. En el Atlántico, las amplitudes características son superiores a 1 m y en el Mediterráneo, inferiores a 0.50 m. A uno y a otro lado, la constituyente lunar principal semidiurna M_2 predomina sobre el resto de las componentes mareales. Esta superioridad es más manifiesta en la boca occidental del Estrecho, directamente afectada por la marea atlántica, que en el lado oriental, donde la contribución de las diferentes constituyentes es más uniforme, tal como corresponde a la marea de una cuenca casi cerrada como es la del Mediterráneo¹².

MATERIAL Y MÉTODOS

Una de las respuestas más características del medio marino a los agentes impulsores que sobre él actúan son las fluctuaciones del nivel medio, y entre ellas, la marea astronómica. Las variaciones del campo gravitatorio causado por la acción de la Luna y el Sol que afecta a los puntos de la superficie terrestre inducen oscilaciones periódicas de la superficie libre del mar. Los períodos característicos de la marea astronómica son conocidos a priori a partir de la expresión matemática de la fuerza generadora de marea⁵.

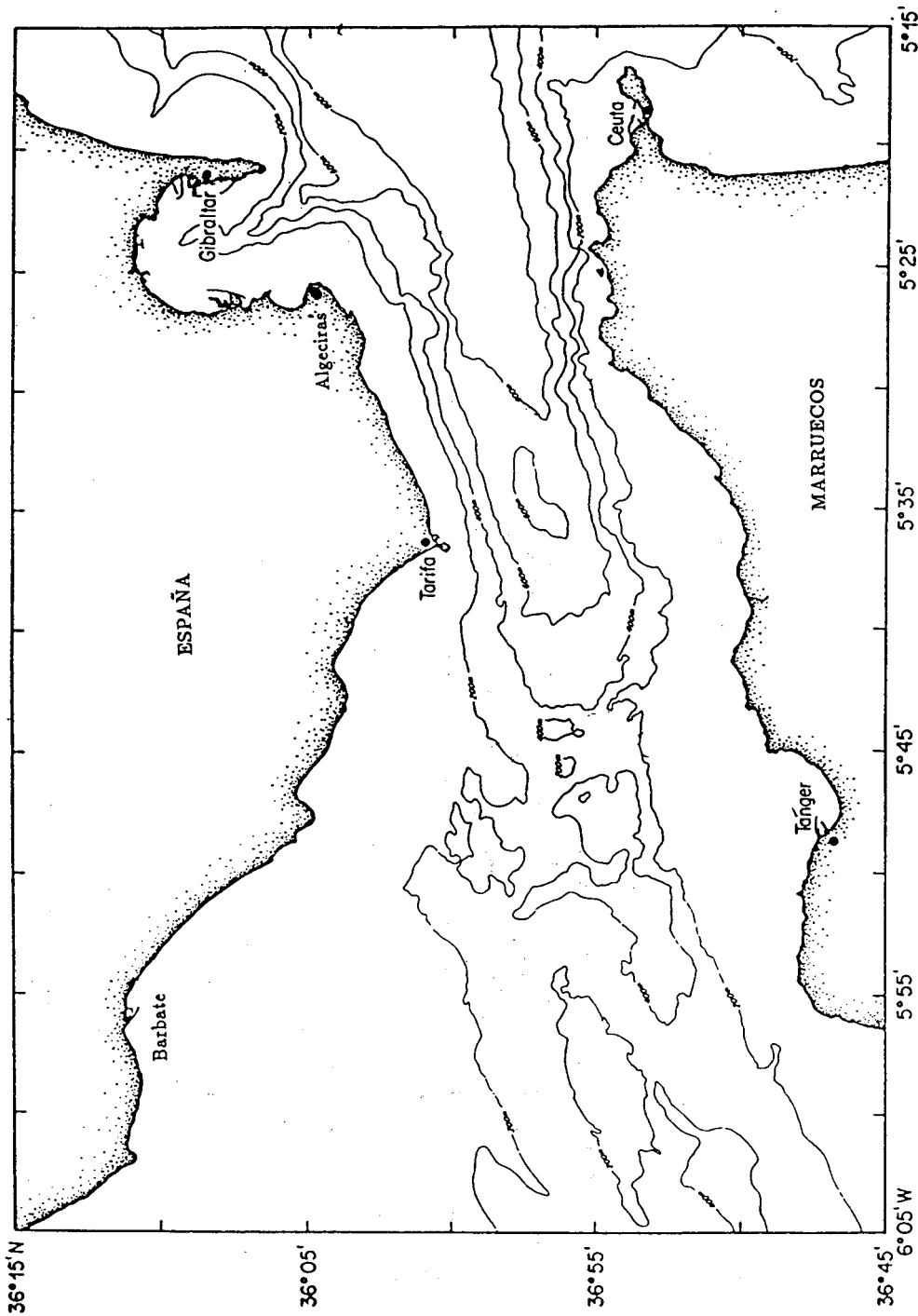


Figura 1. Localización y batimetría del Estrecho de Gibraltar.

Las escalas de la marea astronómica son las propias de las ondas largas, por lo cual las ecuaciones de "shallow water" o de aguas someras son una descripción adecuada para este fenómeno. Estas ecuaciones se derivan a partir de las ecuaciones generales de la hidrodinámica suponiendo fluido incompresible, distribución hidrostática de presiones, y contribución despreciable de los términos que dependen de la componente vertical de la velocidad en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

Conociendo de antemano las frecuencias características de la marea es posible resolver las ecuaciones de aguas someras haciendo uso de una técnica de descomposición armónica (ver e.g. Walters^{16,17}). Este método supone que las variables incógnita η , altura de la superficie libre sobre el nivel medio del mar, y $\vec{u} = (u_1, u_2)$, vector velocidad, se pueden expresar como series del tipo:

$$\eta(x, y, t) = \eta_o(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N \eta_n(x, y) \exp(i\omega_n t) \quad (1)$$

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}_o(x, y, z) + \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N \vec{u}_n(x, y, z) \exp(i\omega_n t) \quad (2)$$

donde:

x, y, z son las coordenadas espaciales.

t es el tiempo.

ω_n es la frecuencia angular de cada armónico.

$i = \sqrt{-1}$

o es el subíndice que indica la componente residual.

Para que η y \vec{u} sean campos con sentido físico —es decir, sean funciones reales— hay que imponer:

$$\omega_{-n} = -\omega_n$$

$$\eta_{-n} = \eta_n^*$$

$$\vec{u}_{-n} = \vec{u}_n^*$$

(el símbolo * indica el complejo conjugado).

Sustituyendo las expresiones (1) y (2) en las ecuaciones de aguas someras y aprovechando las propiedades de ortogonalidad de las funciones exponenciales se obtiene el siguiente sistema¹³:

$$i\omega_k \vec{u}_k + \vec{u}_k \cdot \vec{\nabla}_H \vec{u}_o + \vec{u}_o \cdot \vec{\nabla}_H \vec{u}_k + g \vec{\nabla}_H \eta_k + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_k - \vec{F}_k = -g \vec{T}_k \quad (3)$$

$$i\omega_k \eta_k + \vec{\nabla}_H \cdot (\vec{u}_o \eta_k + \vec{u}_k (h + \eta_o)) = W_k \quad (4)$$

$$k = -N, \dots, N$$

con:

$$\vec{T}_k = \frac{1}{2g} \sum_{\substack{n, m = -N \\ \omega_n + \omega_m = \omega_k}}^N \vec{u}_n \cdot \vec{\nabla}_H \vec{u}_m$$

$$W_k = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n, m = -N \\ \omega_n + \omega_m = \omega_k}}^N \vec{\nabla}_H \cdot (\eta_n \vec{u}_m)$$

donde:

h es el calado en reposo.

g es la aceleración de la gravedad.

$\vec{\Omega}$ es la aceleración angular de la Tierra.

$\vec{\nabla}_H = (\partial_z, \partial_y)$

$\vec{u} = \frac{1}{h+\eta} \int_{-h}^{\eta} \vec{u} dz$ es el vector velocidad promediado verticalmente.

\vec{F}_k es la parte del vector de fuerzas no conservativas dependiente de la componente k -ésima de la marea.

Teniendo en cuenta el sistema local de coordenadas, se cumple que:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_k = f(u_{k1}e_2 - u_{k2}e_1)$$

siendo f el parámetro de Coriolis, $f = 2\Omega \sin \phi$ y, ϕ la latitud del punto elegido como origen de coordenadas.

Si adoptamos la hipótesis de Boussinesq para las tensiones turbulentas resulta que:

$$F_{k_1} = \partial_{x_1}[2K_H \partial_{x_1} u_{k_1}] + \partial_{x_2}[K_H(\partial_{x_1} u_{k_2} + \partial_{x_2} u_{k_1})] + \partial_{x_3}[K_z \partial_{x_3} u_{k_1}]$$

$$F_{k_2} = \partial_{x_1}[K_H(\partial_{x_1} u_{k_2} + \partial_{x_2} u_{k_1})] + \partial_{x_2}[2K_H \partial_{x_2} u_{k_2}] + \partial_{x_3}[K_z \partial_{x_3} u_{k_2}]$$

donde:

K_H es el coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal.

K_z es el coeficiente de viscosidad turbulenta vertical.

En la formulación del modelo de Walters^{16,17} se omiten, además del efecto de la difusión turbulenta, la contribución de las componentes residuales en los términos de interacción W_k y \vec{T}_k . Por contra, para la fricción con el fondo se emplea una expresión de tipo cuadrático.

Afrontar la resolución del sistema de ecuaciones formado por las expresiones (3) y (4) exige emplear una técnica numérica. El método que aquí se ha escogido es el de los Elementos Finitos, el cual ofrece ventajas por su generalidad —que facilita la

esquematzación dentro de un programa de ordenador— y adaptabilidad a la hora de discretizar geometrías complejas y de introducir las condiciones de contorno.

En el modelo desarrollado (ver González⁶) se discretiza en primer lugar la variabilidad vertical de las incógnitas y de los datos, empleando como funciones base o de interpolación polinomios de Legendre de grado par. En una segunda etapa se discretiza la variación horizontal de las variables, haciendo uso de un tipo de elemento isoparamétrico bilineal de cuatro nodos con presión constante. Se trata de un elemento de bajo coste computacional y de grado suficiente para interpolar el gradiente barotrópico de presión y los términos de difusión turbulenta —en estos últimos aparecen derivadas segundas del campo de velocidades que se reducen a derivadas primeras empleando una formulación débil del problema diferencial—. Sustituyendo en las ecuaciones (3) y (4) las funciones datos e incógnitas por las aproximaciones basadas en la discretización reseñada, se obtienen unos residuos numéricos que se minimizan utilizando el método de Galerkin. El resultado es una ecuación para cada componente armónica de la marea que puede expresarse sintéticamente como:

$$X_{k\alpha}^{\beta} y_{k\beta} = z_{k\alpha} \quad (5)$$

$$k = -N, \dots, N$$

(con convenio de suma para los subíndices repetidos)

siendo $X_{k\alpha}^{\beta}$ una matriz de coeficientes constantes que depende de la geometría del dominio —dimensiones de los elementos, calados, factor de Coriolis y condiciones de contorno—, de los parámetros con los que modelizamos el medio físico que estamos estudiando —coeficientes de viscosidad turbulenta, parámetros de fricción con el fondo y distribución de densidades— y de la frecuencia de oscilación ω_k . El vector $y_{k\beta}$ contiene las incógnitas asociadas a la frecuencia mareal k -ésima (η_k y \vec{u}_k). Por último, $z_{k\alpha}$ es el vector de términos independientes. En el caso más general posible, cada uno de los sistemas contenidos en la expresión (5) es no lineal, puesto que, en $z_{k\alpha}$, además de las condiciones de contorno, aparece el efecto de las interacciones no lineales entre ondas, representado en las ecuaciones (3) y (4) por los términos \vec{T}_k y \vec{W}_k . La no linealidad del sistema se resuelve mediante un esquema iterativo tipo Picard.

El esquema numérico que construye y resuelve este sistema algebraico de ecuaciones se ha validado mediante una amplia gama de soluciones analíticas⁶.

RESULTADOS

Para el estudio de la propagación de la marea en el Estrecho hemos discretizado el área comprendida entre las secciones Barbate-Tánger y Algeciras-Ceuta mediante una malla de 384 elementos y 425 nodos (Figura 2). El modelo se ha empleado en su versión verticalmente integrada. Esta restricción, frecuente en los análisis de circulación mareal, puede resultar inadecuada en nuestro caso, en el que la marea interactúa con una circulación residual variable con la profundidad. Este aspecto asociado a la técnica numérica y limitativo de la validez física de los resultados será objeto de discusión en otro lugar.

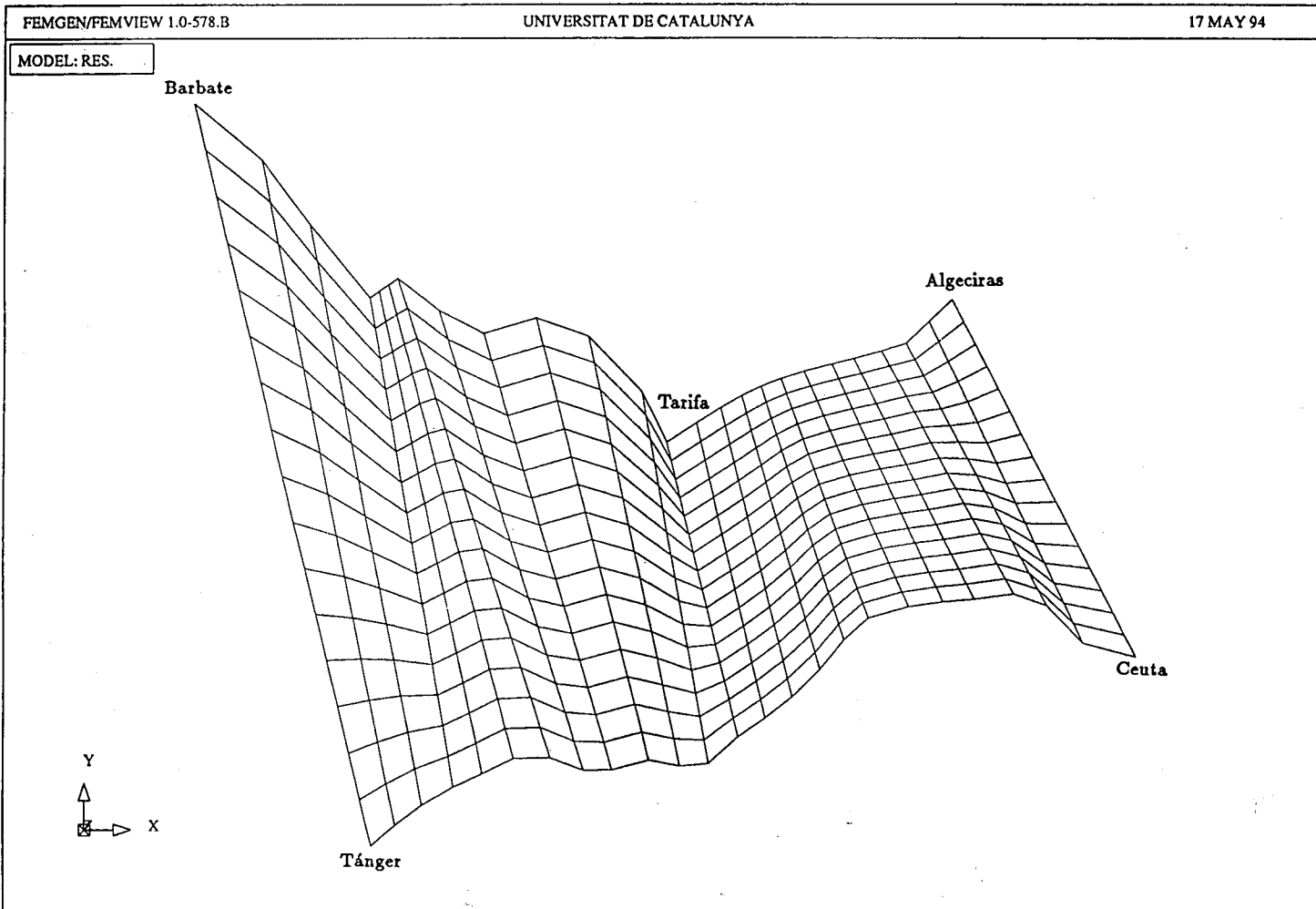


Figura 2. Discretización del Estrecho. Malla computacional empleada.

Se ha analizado numéricamente la propagación de las ondas semidiurnas M_2 , S_2 y N_2 y de la diurna K_1 con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned} g &= 9.81 \text{ m/s}^2 \\ f &= 8.55 \cdot 10^{-5} \text{ 1/s} \\ \rho &= 1025 \text{ Kg/m}^3 \\ K_H &= 100 \text{ m}^2/\text{s} \\ \gamma &= 4 \text{ Kg}/(\text{m}^2\text{s}) \\ \omega_{M_2} &= 1.4052 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \\ \omega_{S_2} &= 1.4544 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \\ \omega_{N_2} &= 1.3788 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s} \\ \omega_{K_1} &= 7.2921 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Estas cuatro ondas representan aproximadamente un 80% de la señal de marea en la boca oeste del Estrecho, mientras que la contribución de estas componentes en el lado mediterráneo, por ser más uniforme como ya se ha mencionado, representa sólo el 70% de la marea.

El valor escogido para el parámetro de viscosidad turbulenta horizontal coincide con el empleado por Sánchez y Pascual¹² y Lynch et al¹⁰. —estos últimos autores, en el Mar de Alborán—. En cuanto al coeficiente de fricción con el fondo, es coherente con la estima del esfuerzo medio debido a la disipación en la zona del Estrecho realizada por Thompson y Brady¹⁴.

El aspecto de la solución es independiente del valor del coeficiente de viscosidad turbulenta vertical K_z , puesto que, al emplear el modelo de su versión verticalmente integrada, los términos $\partial_{x_3}[K_z \partial_{x_3} u_{k1}]$ y $\partial_{x_3}[K_z \partial_{x_3} u_{k2}]$ se anulan, ya que no hay variación según el eje x_3 de las componentes de \vec{u}_k .

En la simulación numérica se ha considerado la existencia de una circulación residual verticalmente integrada, cuyos valores nodales han sido calculados mediante el modelo ECADIS desarrollado por Espino² prescribiendo distribuciones triangulares de velocidad en cada uno de los contornos abiertos del dominio ajustadas al cálculo del caudal medio circulante por el Estrecho realizado por Lacombe y Richez⁸ (Figura 3).

La elección de condiciones de contorno para la altura de la superficie libre es crítica en nuestro caso. El “Anuario de Mareas” del Instituto Hidrográfico de la Marina recoge la previsión anual de pleamares y bajamares para una serie de puertos patrón distribuidos por el litoral (entre ellos, los de Algeciras, Ceuta, Tarifa y Tánger). Estos pronósticos se elaboran en base a los resultados del análisis armónico (amplitudes y fases por constituyente mareal) practicado a distintas series temporales de datos mareográficos obtenidos in situ. Dichos resultados también forman parte del Anuario. En nuestro caso, hemos empleado como condiciones de contorno las amplitudes y fases calculadas por el Instituto para los puertos de Algeciras, Ceuta y Tánger. La ubicación de Tarifa en pleno Estrecho hace que sus datos no puedan ser empleados para definir las condiciones de contorno abierto, aunque los emplearemos más adelante para cotejar los resultados numéricos. Por ello, usamos, los valores calculados por García Lafuente³ para las constantes armónicas de los constituyentes M_2 , S_2 , N_2 y K_1 en el puerto de Barbate, situado en la boca occidental del Estrecho. La variación de las amplitudes y las fases en las secciones Barbate-Tánger y Algeciras-Ceuta se supone lineal.

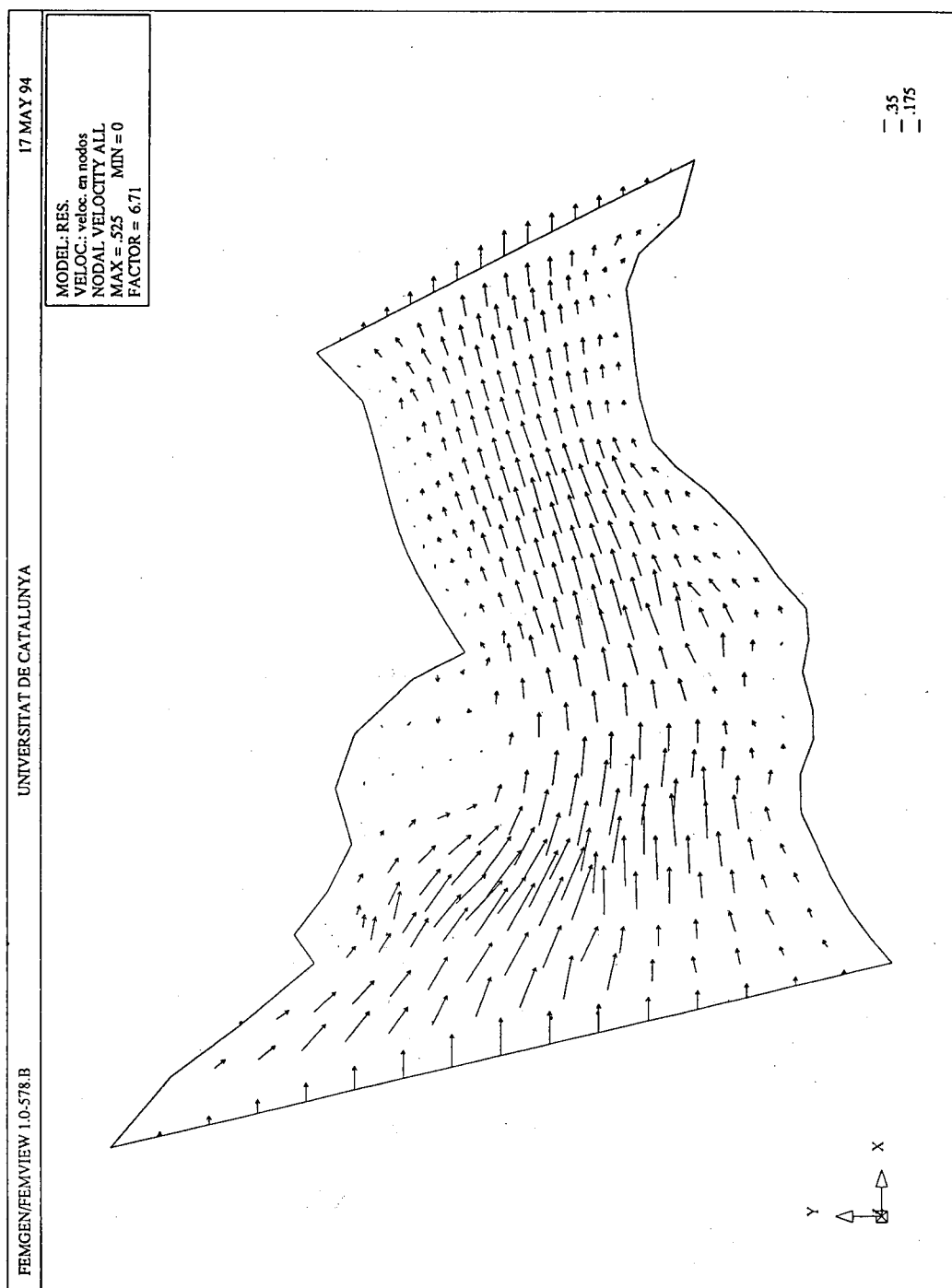


Figura 3. Solución del modelo ECADIS para el campo residual de corrientes.

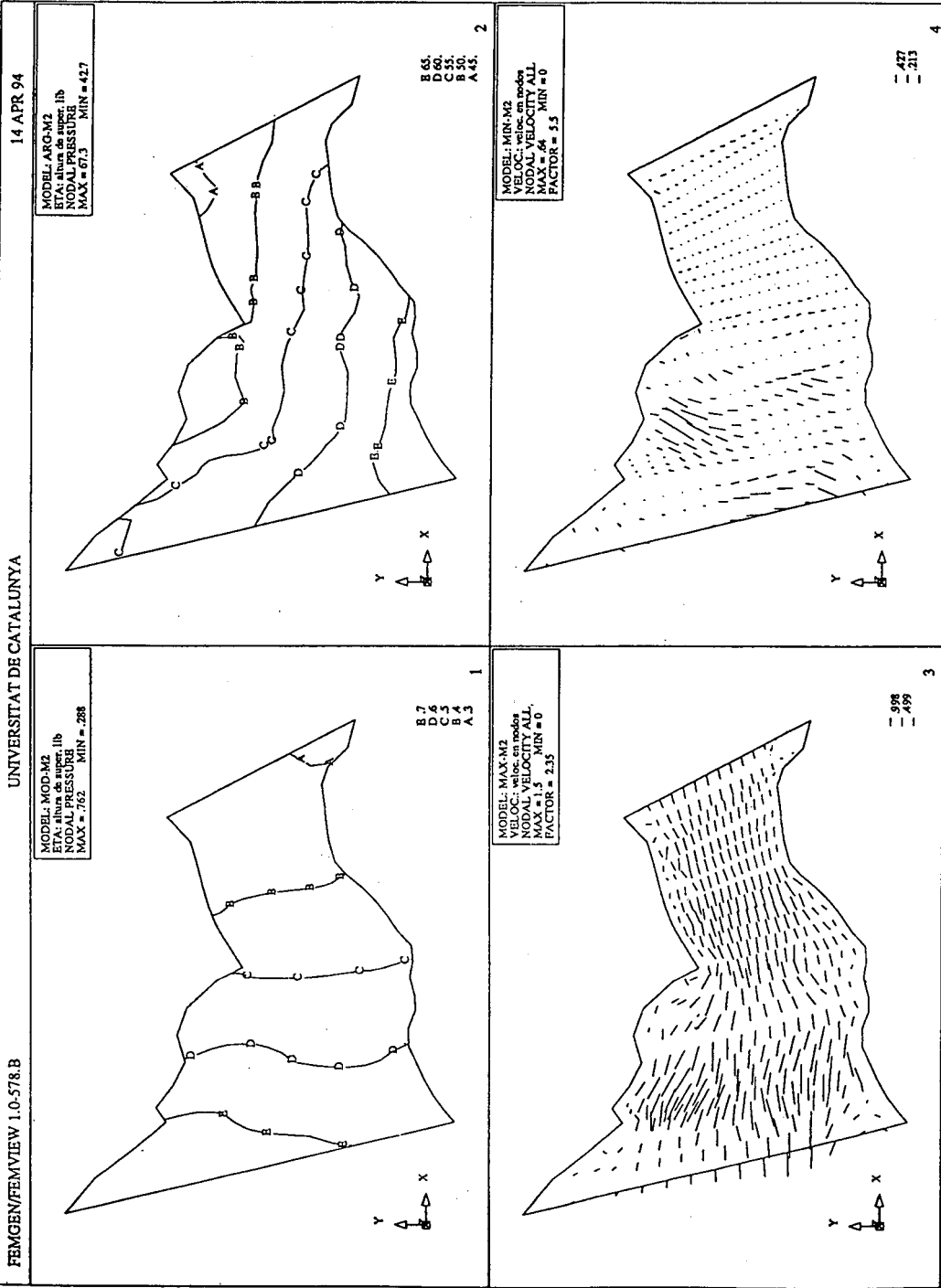


Figura 4. Solución del modelo MAREAS para la onda M2. 1: amplitud de la onda (en m). 2: Fase de la onda (en °). 3: semieje mayor de la elipse de marea (en m/s). 4: semieje menor de la elipse de marea (en m/s).

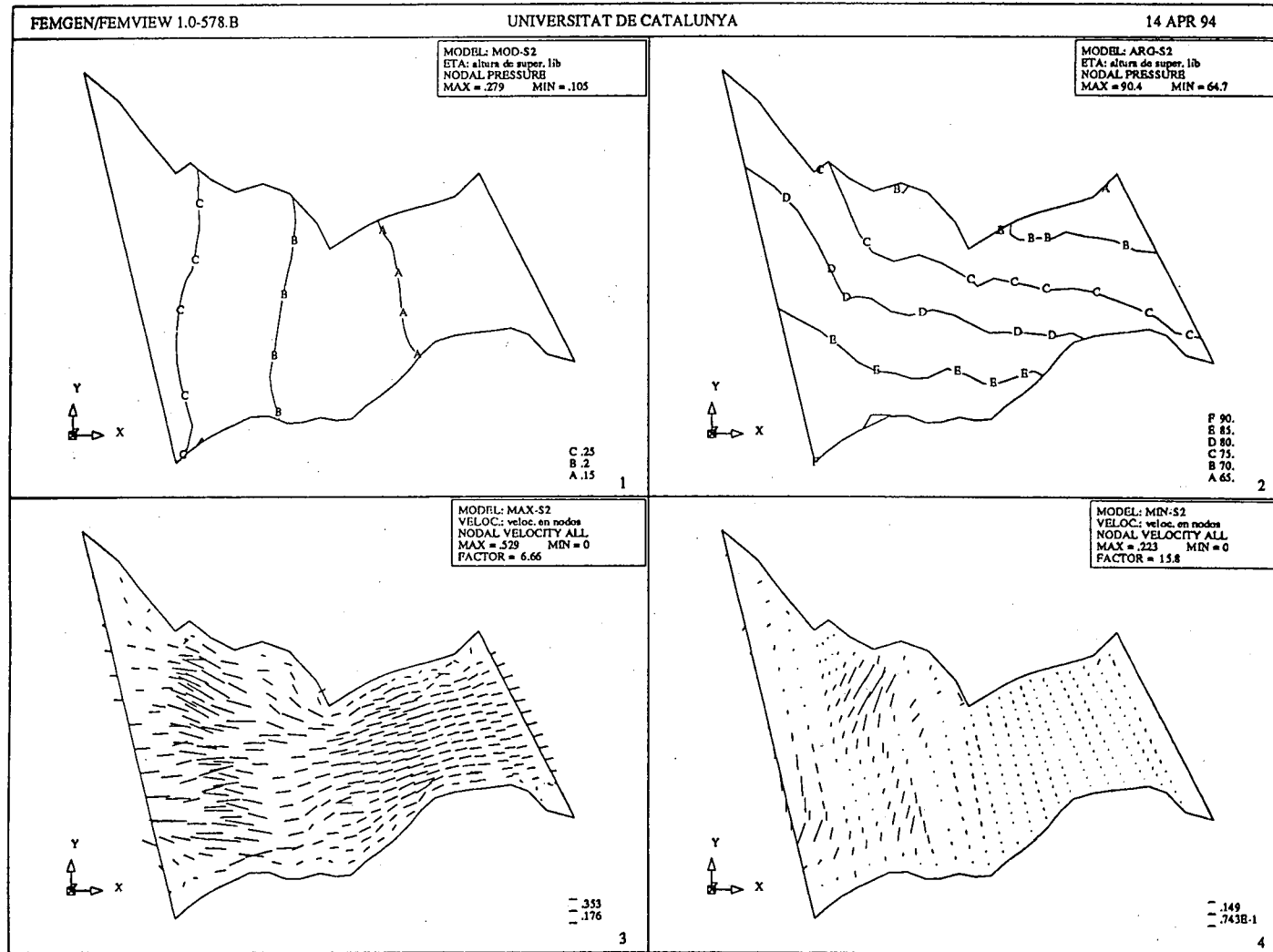


Figura 5. Solución del modelo MAREAS para la onda S2. 1: amplitud de la onda (en m). 2: Fase de la onda (en $^{\circ}$). 3: semieje mayor de la elipse de marea (en m/s). 4: semieje menor de la elipse de marea (en m/s).

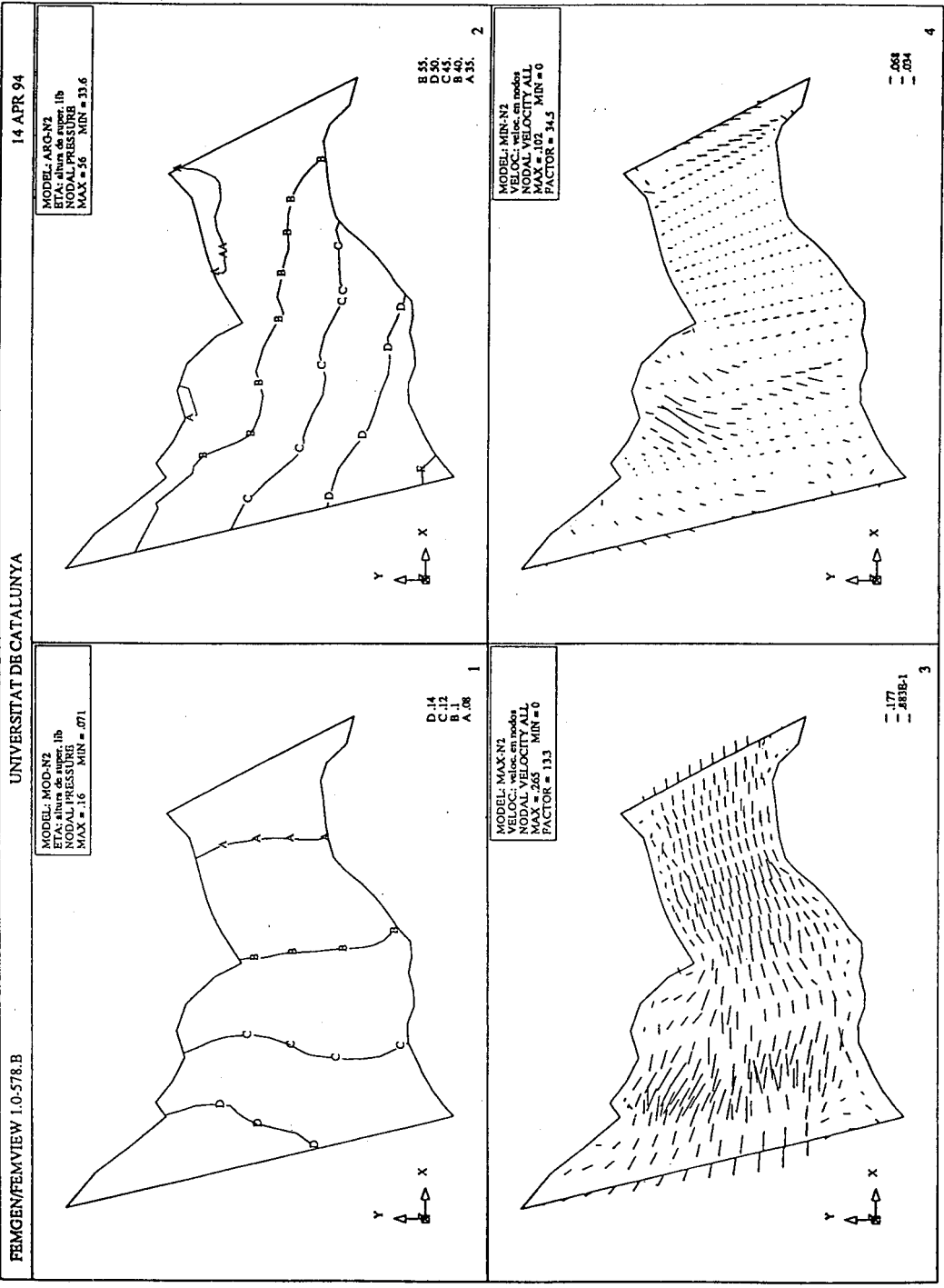


Figura 6. Solución del modelo MAREAS para la onda N2. 1: amplitud de la onda (en m). 2: Fase de la onda (en °). 3: semieje mayor de la elipse de marea (en m/s). 4: semieje menor de la elipse de marea (en m/s).

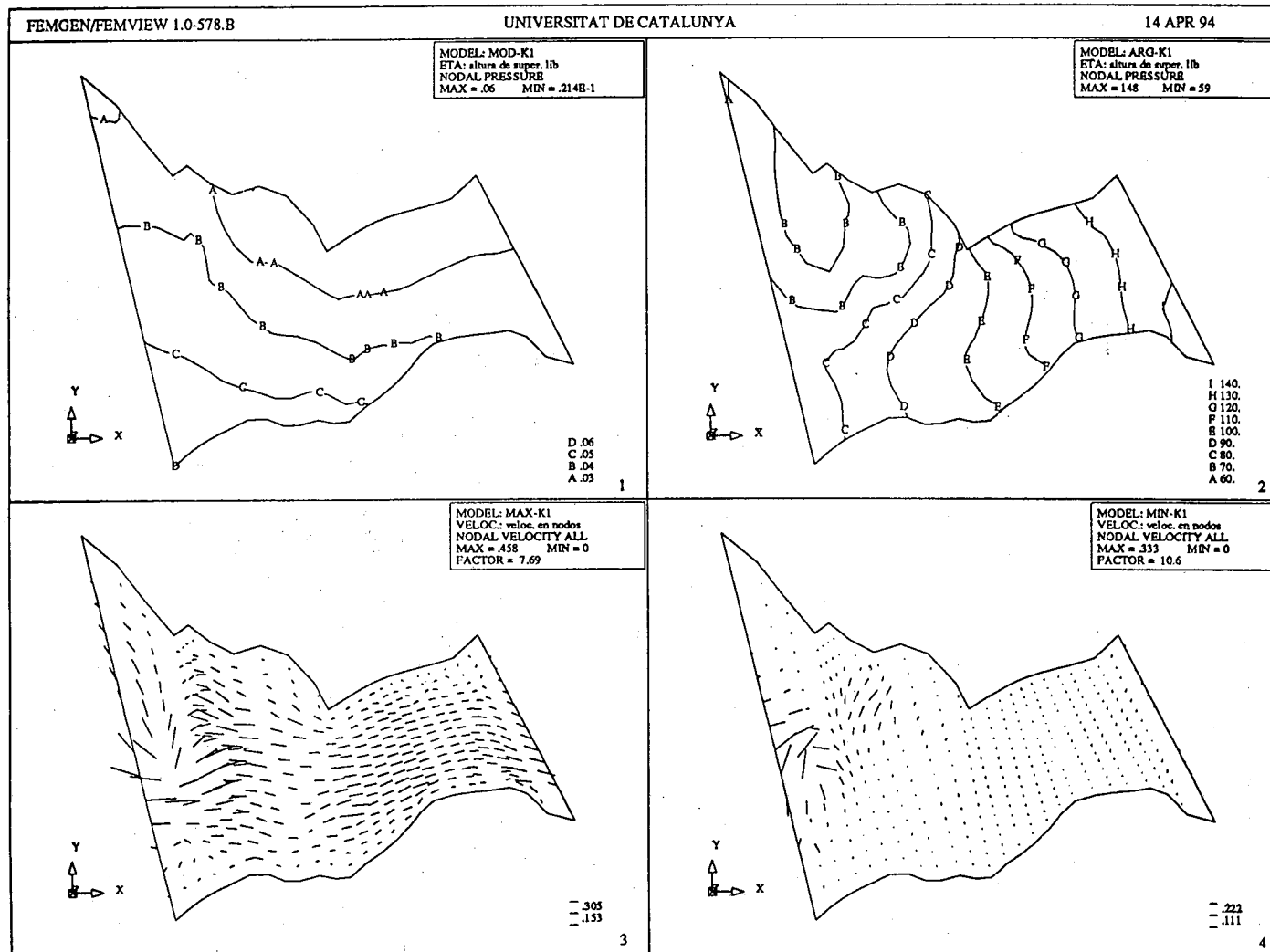


Figura 7. Solución del modelo MAREAS para la onda K1. 1: amplitud de la onda (en m). 2: Fase de la onda (en $^{\circ}$). 3: semieje mayor de la elipse de marea (en m/s). 4: semieje menor de la elipse de marea (en m/s).

Los resultados obtenidos para cada una de las cuatro ondas consideradas se han representado en forma de mapas de isolíneas de amplitud y fase para la marea, calculadas a partir de la solución para las alturas de la superficie libre, y de valores nodales de los semiejes mayor y menor de las elipses de marea, correspondientes a la solución para el campo de velocidades. En la Figura 4 aparecen recogidas las soluciones para la onda M_2 , en la Figura 5 las soluciones para la onda S_2 , y en las Figuras 6 y 7 las de las ondas N_2 y K_1 , respectivamente.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La estructura de las soluciones obtenidas concuerda con las descripciones de la marea en la zona. Así, para la onda M_2 , se comprueba el decrecimiento casi uniforme de la amplitud de la onda a través del Estrecho. La orientación este-oeste de las líneas de igual fase implica la propagación en dirección sur de la onda M_2 , en contraposición con la dirección norte que se observa en el Atlántico a grandes profundidades, y parece confirmar la suposición de que las líneas co-mareales intersectan la costa española al oeste del Estrecho. En cuanto a las soluciones para las otras dos ondas semidiurnas, S_2 y N_2 , mantienen una estructura análoga a la de la onda M_2 , es decir, un decrecimiento casi uniforme de la amplitud de aproximadamente un 50% a lo largo del eje del Estrecho y la dirección de propagación hacia el sur. Por contra, la onda diurna K_1 presenta una distribución de las líneas de igual amplitud prácticamente paralela al eje del canal y su dirección de propagación es hacia el este.

El ajuste de los resultados numéricos para la altura de la superficie libre en Tarifa con los datos del Anuario de Mareas es razonable, sobretodo para las ondas de mayor amplitud. Para la onda M_2 se obtiene un módulo de 0.49 m y una fase de 49° , frente a la previsión del Anuario de 0.402 m y 41.09° . Para la onda S_2 el resultado es de 0.18 m y 72° contra 0.159 m y 64.63° . Para N_2 el modelo prevé una amplitud de 0.10 m con una fase de 37° , y el Anuario, 0.083 m y 16.07° . Por último, para la onda K_1 resulta un módulo de 0.024 m y una fase de 100° , mientras la previsión del Anuario es de 0.024 m y 142.64° .

El ajuste de las soluciones en velocidades es aún mejor. Para la onda M_2 , la velocidad máxima obtenida en la entrada occidental del Estrecho es 1.20 m/s frente a los 1.198 m/s medidos por Rico Palma y Ruiz Cañavate¹¹. Para la S_2 se han obtenido velocidades máximas de 0.40 m/s que concuerdan apreciablemente con los 0.455 m/s medidos por estos autores. Para la K_1 la previsión numérica es de 0.20 m/s, mientras las observaciones indican un valor de 0.268 m/s. No se dispone de medidas de velocidades referentes a la onda N_2 .

El eje menor de las elipses de marea de las cuatro ondas es sensiblemente más pequeño que el eje mayor de las mismas, especialmente al este de la angostura, zona en la cual la elipse degenera en una línea recta. Ello indica que el flujo mareal consiste en un vaivén en la dirección este-oeste. El sentido de giro de las elipses es esencialmente horario.

Entre las razones que explican que las soluciones obtenidas para la variación de nivel de la superficie libre (sobre todo en cuanto a las fases de las ondas) no sean tan

precisas como las correspondientes a la corriente, cabe señalar que estamos modelando un sistema bicapa mediante una versión verticalmente integrada del modelo. Otros efectos distorsionadores pueden ser debidos a la interpolación de menor orden empleada para el campo de alturas de la superficie libre, y quizás el más relevante, la carencia de datos para obtener unas condiciones de contorno precisas, principalmente en la boca occidental del Estrecho.

Por último, mencionar que el modelo empleado incorpora una descripción lineal para la fricción en el fondo, con la cual no es posible reproducir la generación de sobremareas. Sin embargo, si la fricción se parametriza mediante una expresión de tipo cuadrático sí que es posible explicar la aparición de frecuencias semidiurnas, cuartodiurnas y sextodiurnas sin origen astronómico. Este hecho, observado en áreas relativamente someras —como el Estrecho de Gibraltar—, se debe a la transmisión de momentum a las nuevas frecuencias del espectro producida por los términos no lineales asociados a la fricción con el fondo⁹.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Los distintos términos de las ecuaciones (3) y (4) contribuyen de manera diferente a las soluciones numéricas para los campos de altura de la superficie libre y velocidad. Una manera de ponerlo de manifiesto, y de identificar los términos más relevantes para cada una de las ondas consideradas, es repetir la simulación numérica prescindiendo de algunas de dichas contribuciones. En nuestro caso, hemos considerado cinco casos para el análisis de sensibilidad.

- Caso 1. Sin circulación residual.
- Caso 2. Sin fricción con el fondo.
- Caso 3. Sin difusión turbulenta.
- Caso 4. Sin circulación residual, sin fricción con el fondo y sin difusión turbulenta.
- Caso 5. Sin circulación residual, sin fricción con el fondo, sin difusión turbulenta y parámetro de Coriolis nulo.

Los resultados extraídos para cada uno de los constituyentes considerados — M_2 , S_2 , N_2 , y K_1 — se han comparado con las soluciones recogidas en las Figuras 4, 5, 6 y 7. Denotando como η_k y \vec{v}_k las soluciones de las Figuras 4, 5, 6 y 7 y como η_k^I y \vec{v}_k^I las correspondientes a cada uno de los casos anteriormente descritos, se han evaluado dos tipos de “error”:

– Error medio.

$$\bar{\varepsilon}_{\eta_k} = \frac{1}{nelem} \sum_{ielem=1}^{nelem} \left\| \frac{\eta_k - \eta_k^I}{\eta_k} \right\| \quad k = 1, \dots, 4$$

$$\bar{\varepsilon}_{\vec{v}_k} = \frac{1}{npoin} \sum_{ipoin=1}^{npoin} \frac{\| \vec{v}_k - \vec{v}_k^I \|}{\| \vec{v}_k \|} \quad k = 1, \dots, 4$$

-Error máximo.

$$\hat{\varepsilon}_{\eta_k} = \max_{ielem} \left\| \frac{\eta_k - \eta_k^I}{\eta_k} \right\| \quad k = 1, \dots, 4$$

$$\hat{\varepsilon}_{\vec{v}_k} = \max_{ipoin} \frac{\| \vec{v}_k - \vec{v}_k^I \|}{\| \vec{v}_k \|} \quad k = 1, \dots, 4$$

Los resultados se recogen en las Tablas I, II, III y IV. El comportamiento de las tres ondas semidiurnas es análogo: los mayores errores corresponden a las soluciones en velocidades, mientras que los campos de alturas de la superficie libre apenas sufren variaciones. El efecto de la difusión turbulenta de momentum es especialmente importante, como muestra el hecho de que la máxima discrepancia corresponde al caso en que se toma un valor nulo para el parámetro K_H .

En el caso de la onda diurna K_1 , hay cambios apreciables en las alturas de la superficie libre cuando se prescinde de los términos turbulentos. También es reseñable la superposición de efectos entre la aceleración de Coriolis y la difusión turbulenta de momentum y la fricción con el fondo, hasta el punto que la solución obtenida en el caso 5 es sensiblemente mejor que la del caso 4.

La interacción entre la circulación residual y la corriente generada por la marea es un efecto nada desdeñable. Salvo en la onda M_2 la alteración de las soluciones en velocidades es superior al 10% y, en la onda K_1 , aquella sobrepasa el 50%.

Onda M_2				
Caso	$\bar{\varepsilon}_\eta$	$\bar{\varepsilon}_{\vec{v}}$	$\hat{\varepsilon}_\eta$	$\hat{\varepsilon}_{\vec{v}}$
1	$9.116 \cdot 10^{-3}$	$2.838 \cdot 10^{-2}$	$4.230 \cdot 10^{-2}$	0.3899
2	$1.956 \cdot 10^{-2}$	0.3039	0.1058	3.6600
3	$1.658 \cdot 10^{-2}$	1.3496	0.1419	12.4178
4	$2.743 \cdot 10^{-2}$	0.5434	0.1539	6.003
5	$6.129 \cdot 10^{-2}$	0.6184	0.2488	6.647

Tabla I. Análisis de sensibilidad. Comparación de soluciones para la onda M_2 .

Onda S_2				
Caso	$\bar{\varepsilon}_\eta$	$\bar{\varepsilon}_{\vec{v}}$	$\hat{\varepsilon}_\eta$	$\hat{\varepsilon}_{\vec{v}}$
1	$8.796 \cdot 10^{-3}$	0.1383	$4.179 \cdot 10^{-2}$	0.6724
2	$1.869 \cdot 10^{-2}$	0.2902	0.1006	3.246
3	$1.664 \cdot 10^{-2}$	1.3565	0.1458	15.190
4	$2.648 \cdot 10^{-2}$	0.5222	0.1473	6.740
5	$5.903 \cdot 10^{-2}$	0.6002	0.2389	7.371

Tabla II. Análisis de sensibilidad. Comparación de soluciones para la onda S_2 .

Onda N_2				
Caso	$\bar{\varepsilon}_\eta$	$\bar{\varepsilon}_{\vec{v}}$	$\hat{\varepsilon}_\eta$	$\hat{\varepsilon}_{\vec{v}}$
1	$8.594 \cdot 10^{-3}$	0.1452	$4.131 \cdot 10^{-2}$	0.8441
2	$1.514 \cdot 10^{-2}$	0.2810	$9.025 \cdot 10^{-2}$	1.834
3	$1.207 \cdot 10^{-2}$	1.084	0.1067	5.842
4	$2.232 \cdot 10^{-2}$	0.5443	0.1130	3.196
5	$5.156 \cdot 10^{-2}$	0.6097	0.2186	5.268

Tabla III. Análisis de sensibilidad. Comparación de soluciones para la onda N_2 .

Onda K_1				
Caso	$\bar{\varepsilon}_\eta$	$\bar{\varepsilon}_{\vec{v}}$	$\hat{\varepsilon}_\eta$	$\hat{\varepsilon}_{\vec{v}}$
1	$9.473 \cdot 10^{-2}$	0.5380	0.4238	2.945
2	$7.515 \cdot 10^{-2}$	0.6164	0.2758	3.986
3	0.5406	17.814	4.304	251.08
4	0.9530	57.253	6.553	1223.53
5	0.1779	0.9693	0.8551	9.937

Tabla IV. Análisis de sensibilidad. Comparación de soluciones para la onda K_1 .

REFERENCIAS

1. H.L. Bryden y T.H. Kinder, "Gibraltar Experiment. A Plan for Dynamic and Kinematic Investigations of Strait Mixing, Exchange and Turbulence.", Woods Hole Oceanographic Institution, *Technical Report*, 86-29, (1986).
2. M. Espino, "Estabilización de la superficie libre en la solución de ecuaciones Shallow-Water por Elementos Finitos. Aplicaciones oceanográficas", *Tesis Doctoral*, Barcelona, (1994).
3. J.M. García Lafuente, "Variabilidad del nivel del mar en el Estrecho de Gibraltar: Mareas y oscilaciones residuales", *Tesis Doctoral*, (1986).
4. M.A. García, "Contribución al estudio de la circulación marina mediante el método de los Elementos Finitos", *Tesis Doctoral*, Barcelona, (1990).
5. G. Godin, *Tides*, ed. CICESE, (1991).
6. M. González, "Un modelo numérico en Elementos Finitos para la corriente inducida por la marea. Aplicaciones al Estrecho de Gibraltar", *Tesis de Especialidad*, Barcelona, (1994).
7. E. Hernández Pacheco, "Fisiografía de Solar Hispano", *Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Tomo XVI, Madrid, (1955).
8. H. Lacombe y C. Richez, "The Regime of the Strait of Gibraltar", *Hydrodynamic of Semi-enclosed Seas*, Nihoul, ed. Elsevier, (1982).
9. C. Le Provost, "Generation of Overtides and Compound Tides" (Review), *Tidal Hydrodynamics*, ed. B.B. Parker, pp 297-320, Wiley, (1991).
10. D.R. Lynch y F.E. Werner, "Finite Element of Reduced-gravity Flow in the Alboran Sea: Sensivity Studies", *Seminario sobre la Oceanografía Física del Estrecho de Gibraltar*, ed. J.L. Almazán, H. Byden, T. Kinder y G. Parrilla, (1988).

11. J. Rico y A. Ruiz, "Fluctuaciones del flujo en el Estrecho de Gibraltar", *Seminario sobre la Oceanografía Física del Estrecho de Gibraltar*, ed. J.L. Almazán, H. Byden, T. Kinder y G. Parrilla, (1988).
12. P. Sánchez y J.R. Pascual, "Primeras experiencias en la modelación del Estrecho de Gibraltar", *Seminario sobre la Oceanografía Física del Estrecho de Gibraltar*, ed. J.L. Almazán, H. Byden, T. Kinder y G. Parrilla, (1988).
13. R.L. Snyder, M. Sidjabat y J.H. Filloux, "A Study of Tides, Setup and Bottom Friction in a Shallow Semi-enclosed Basin. Part II: Tidal Model and Comparison with Data", *Journal of Physical Oceanography*, Vol. 10, pp. 170-188, (1979).
14. L. Thompson y E. Brady, "The Pilot Morning of the Gibraltar Experiments: Flow Over the Camarinal Sill.", *Seminario sobre la Oceanografía Física del Estrecho de Gibraltar*, ed. J.L. Almazán, H. Byden, T. Kinder y G. Parrilla, (1988).
15. P. Villanueva, A. Ruiz y J. Rico, "Contribución al conocimiento del umbral del Estrecho de Gibraltar", *Seminario sobre la Oceanografía Física del Estrecho de Gibraltar*, ed. J.L. Almazán, H. Byden, T. Kinder y G. Parrilla, (1988).
16. R.A. Walters, "A Finite Element Model for Tidal and Residual Circulation", *Communications in Applied Numerical Methods*, 2, pp. 393-398, (1986).
17. R.A. Walters y F.E. Werner, "Nonlinear Generation of Overtides, Compound Tides, and Residuals", *Tidal Hydrodynamics*, ed. B.B. Parker, pp. 297-320, (1991).